Afleiðslukerfi frá Evklíð til Hilberts

Hið mikla stærðfræðirit Evklíðs, *Frumþættir* (eða *Stóíkeia* eins og bókin heitir á grísku) setur stærðfræði fram sem afleiðslukerfi. Það hefst á 10 frumsetningum sem allar aðrar setningar eru leiddar af.

Fimm fyrstu frumsetningarnar eru almennar og varða alla stærðfræði en þær fimm seinni fjalla um rúmfræðina sérstaklega.

Almennu frumsetningarnar eru:

1. Séu tveir hlutir báðir jafnir þriðja hlut þá eru þeir líka jafnir hvor öðrum.
2. Sé jafnmiklu bætt við tvo jafna hluti verða útkomurnar jafnar.
3. Sé jafnmikið tekið af tveim jöfnum hlutum verða útkomurnar jafnar.
4. Hlutir sem fylla sama rúm eru jafnir.
5. Heild er stærri en hluti hennar.

Rúmfræðilegu frumsetningarnar eru:

1. Frá hvaða punkti sem er má draga beina línu í hvaða punkt sem er.
2. Strik af endanlegri lengd má framlengja í beina línu.
3. Hægt er að draga hring með hvaða fjarlægð sem er fyrir radíus og hvaða punkt sem er fyrir miðju.
4. Öll rétt horn eru jafn stór.
5. Ef strik sker tvær línur og innri hornin á aðra hlið þess eru samtals minni en tvö rétt horn þá skerast línurnar tvær þeim megin við strikið ef þær eru framlengdar ótakmarkað.

Stærðfræðilegar sannanir verða að byggja á einhverjum forsendum. Þær forsendur kunna að vera niðurstöður annarra sannana sem byggja þá á einhverjum öðrum forsendum og þannig koll af kolli. En þetta getur ekki rakið sig endalaust. Undirstaða sérhvers afleiðslukerfis hlýtur að vera ósannaðar setningar sem gengið er að sem vísum. Slíkar setningar eru kallaðar *frumsetningar*. (Í mörgum Evrópumálum er gríska orðið *axiom* notað um þær.)

Helstu einkenni vel heppnaðra afleiðslukerfa eru:

i. Kerfið er sjálfu sé samkvæmt, þ.e. ekki er hægt að leiða mótsögn af frumsetningunum.
ii. Frumsetningarnar eru óháðar hver annarri, þ.e. ekki er hægt að leiða neina þeirra af hinum (enda er þá óþarfi að hafa hana fyrir frumsetningu).
iii. Frumsetningarnar duga til að leiða út merkilegar niðurstöður.
iv. Byrjað er á að tilgreina *allar* frumsetningar (eða ósannaðar staðhæfingar) sem notaðar verða.

Fyrsta skilyrðið er það mikilvægasta því sé hægt að leiða út mótsögn þá er hægt að fá út hvaða vitleysu sem er. En þótt þetta skilyrði sé mikilvægt er mjög erfitt að sannprófa hvort það er uppfyllt. Aðferðir til að sannprófa að afleiðslukerfi sé sjálfu sér samkvæmt tóku ekki að þróast ekki fyrr en undir lok 19. aldar.

Af mótsögn er hægt að leiða hvað sem er

Mótsögn er setning á forminu p og ekki p (þe. fullyrðing um að eitthvað bæði sé satt og sé ekki satt). Af setningu á þessu formi er hægt að leiða hvaða vitleysu sem er t.d. að krókódílar séu spendýr.

Í rökfærslunni hér á eftir eru aðeins notaðar afleiðslureglurnar

a) Af (p og q) leiðir p.
b) Af (p og q) leiðir q.
c) Af p leiðir (p eða q).
d) Af (p eða q) og (ekki p) leiðir q.

Hér er rökfærslan:

1.	p og ekki p	Forsenda.
2.	p	Leiðir af forsendunni í línu 1 skv. reglu a.
3.	p eða krókódílar eru spendýr.	Leiðir af línu 2 skv. reglu c.
4.	ekki p	Leiðir af forsendunni í línu 1 skv. reglu b.
5.	Krókódílar eru spendýr .	Leiðir af 3. og 4. línu skv. reglu d.

Fyrr á öldum höfðu stærðfræðingar ekki áhyggjur af þeim möguleika að kerfi Evklíðs gæti verið ósamkvæmt og leitt af sér mótsögn. Menn litu svo á að frumsetningar hans væru augljóslega sannar, og sannar setningar geta vitaskuld ekki verið í mótsögn hver við aðra. Hins vegar veltu margir því fyrir sér hvort kerfi Evklíðs uppfyllti annað skilyrðið, þe. hvort frumsetningarnar væru óháðar hver annarri, einkum því hvort hægt væri að leiða fimmtu rúmfræðilegu frumsetninguna af hinum. Þetta reyndu margir að gera og af þeim tilraunum er mikil saga. Skemmst er frá því að segja að þetta reyndist ómögulegt og nú vita menn að hinar fimm rúmfræðilegu frumsetningar Evklíðs eru óháðar hver annarri.

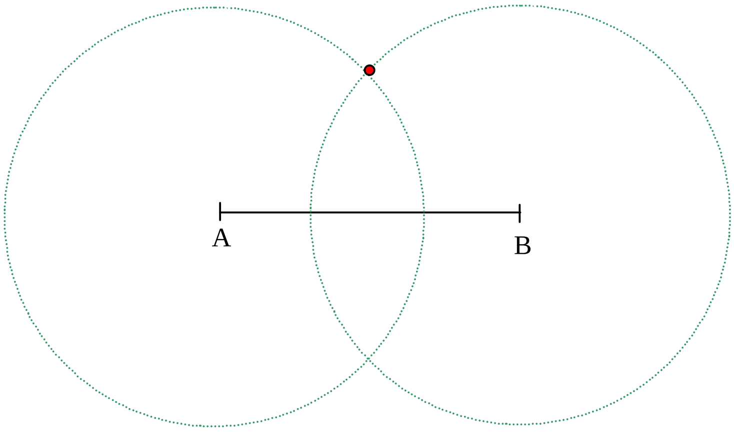
Um þriðja skilyrðið þarf ekki að hafa mörg orð þegar kerfi Evklíðs er annars vegar. Setningarnar sem hann leiddi út eru hver annarri merkilegri.

En hvað með fjórða skilyrðið, skyldi Evklíð hafa láðst að nefna einhverjar forsendur sem hann notar til að sanna rúmfræðisetningarnar í *Frumþáttunum*? Fram á 19. öld var rit Evklíðs nánast álitið hafið yfir alla gangrýni. Það þótti til slíkrar fyrirmyndar hvað varðar röklega byggingu og skipulega framsetningu að fáum datt í hug sá möguleiki að gloppur væru í rökum Evklíðs. En svo bregðast krosstré sem önnur tré.

Um aldamótin 1900 var þjóðverjinn *David Hilbert* (1862-1943) frægastur allra stærðfræðinga. Hann hafði ekki bara áhuga á að rannsaka mengi, tölur, föll og ferla og önnur efni sem stærðfræðingar höfðu fengist við heldur velti hann líka fyrir sér eðli stærðfræðinnar og röklegum undirstöðum hennar.

Hilbert og ýmsir samtímamenn hans gerðu strangari kröfur til stærðfræðilegrar röksemdafærslu en áður höfðu þekkst og sannanir Evklíðs uppfylltu þessar kröfur ekki að öllu leyti. Hilbert benti meðal annars á að þegar í sönnuninni á fyrstu setningu *Frumþáttanna* notaði Evklíð fleiri forsendur en frumsetningarnar sem taldar voru upp á undan.

Þessi fyrsta setning Evklíðs segir að sé gefið strik (eins og AB á myndinni) megi byggja jafnarma þríhyrning ofan á það með því að draga tvo jafnstóra hringi með endapunkta striksins fyrir miðjur og draga svo línur frá endum striksins í annan



skurðpunkt hringjanna.

Vissulega leiðir af frumsetningum Evklíðs að hægt sé að draga tvo jafnstóra hringi með A og B fyrir miðjur. En Hilbert benti á að það leiðir ekki af þessum frumsetningum að hringir eins og þeir sem hér eru sýndir hafi skurðpunkt. Til að leiða út þessa fyrstu setningu Evklíðs þarf því að nota forsendu sem segir að punktar liggi þétt á hringferli þannig að ef hringur er að hluta utan annars hrings og að hluta innan hans þá eigi þeir einhvern punkt sameiginlegan. Ástæðan fyrir því að Evklíð láðist að taka þetta fram er sjálfsagt sú hversu algerlega augljóst þetta er. En vel byggt afleiðslukerfi á að nefna allar forsendur sem notaðar eru, sama hversu einfaldar, augljósar og ómerkilegar þær eru.

Hilbert benti á fleiri forsendur sem Evklíð notar án þess að nefna þær, eins og t.d. þá að ef þrír ólíkir punktar liggja á sömu línu þá sé einn þeirra á milli hinna tveggja.

Hilbert setti fram nýtt frumsetningakerfi fyrir evklíðska rúmfræði árið 1899. Frumsetningarnar í kerfi hans voru 20 talsins. Það segir sína sögu um snilli Evklíðs að það skuli hafa liðið meira en 2.200 ár þar rituð var fullkomnari framsetning en hans á afleiðslukerfi fyrir rúmfræði.

Þótt Hilbert hafi gagnrýnt kerfi Evklíðs áttu hans eigin hugmyndir um stærðfræði að mörgu leyti ættir að rekja til *Frumþáttanna*. Í stuttu máli sagt voru þessar hugmyndir á þá leið að hægt væri að orða frumsetningar allrar stærðfræði á formlegu táknmáli (þe. máli með endanlegum orðaforða og nákvæmum reglum um hvernig orð og tákn mynda setningar) og setja fram strangar rökfræðireglur um hvernig leiða má öll stærðfræðileg sannindi af þeim. Hilbert áleit að þannig væri hægt að binda stærðfræðina í afleiðslukerfi sem væri í senn *sjálfu sér samkvæmt*, *fullkomið*, og *ákvarðanlegt*.

- ✓ Þegar hefur verið skýrt hvað það merkir að kerfi sé *sjálfu sér samkvæmt*, þe. að það geti aldrei gerst að tvær setningar sem leiddar eru af frumsetningunum stangist á þannig að önnur neiti hinni.
- ✓ Að kerfið sé *fullkomið* merkir að hægt sé að leiða allar sannar stærðfræðisetningar af frumsetningunum, þe. að það verði engin stærðfræðileg sannindi út undan.
- ✓ Að kerfið sé *ákvarðanlegt* þýðir að til sé algrím (þe. endanleg, örugg og ótvíræð aðferð) til að komast að því hvort setning sé afleiðing af frumsetningunum.

Þessar hugmyndir Hilberts voru í dúr við skoðanir flestra stærðfræðinga. Þeir litu á fræði sín sem formlegt kerfi þar sem öll sannindi væru leidd með ströngum rökfærslum af fáeinum grundvallarreglum eða frumsetningum.

Í byrjun þessarar aldar bjuggust flestir við að draumar Hilberts rættust senn og til yrði formlegt afleiðslukerfi fyrir alla stærðfræði. En árið 1931 sannaði austurríski stærðfræðingurinn *Kurt Gödel* (1906-1978) að ómögulegt sé að kerfisbinda talnafræði (þá grein stærðfræðinnar sem fjallar um heilar tölur) með þeim hætti sem Hilbert hugsaði sér.

Með *sönnun Gödels* var sýnt fram á að ómögulegt sé að búa til frumsetningakerfi fyrir talnafræði sem sé *í senn fullkomið og sjálfu sér samkvæmt*. Þar sem nauðsynlegt er að gera þá kröfu að slík kerfi séu sjálfum sér samkvæm þýðir þetta í raun að útilokað sé að setja fram frumsetningar sem dugi til að leiða út allar sannar stærðfræðilegar setningar um heilar tölur.

Nú kann einhverjum að detta í hug að það sé þá bara hægt að bæta við fleiri frumsetningum þar til komnar eru nægar forsendur til að leiða út alla stærðfræði. En sönnun Gödels útilokar að það sé hægt, hún tekur af öll tvímæli um að það er alveg sama hvað frumsetningarnar eru margar alltaf verða einhver stærðfræðileg sannindi út undan.

Ef draumar Hilberts hefðu ræst þá væri stærðfræðilegum rannsóknum að vissu leyti lokið, því það þyrfti ekki lengur hugmyndaflug og sköpunargáfu til að komast að því hvort stærðfræðileg fullyrðing sé sönn eða ósönn, það væri hægt að láta tölvu framkvæma algrímið sem sker úr um hvort setning er afleiðing af frumsetningunum eða ekki. Sönnun Gödels útilokar að vísu ekki að slíkt algrím sé til. Hún útilokar aðeins að stærðfræðilegt kerfi gæti verið *fullkomið* en eftir að hún var komin fram var það enn opin spurning hvort það gæti verið *ákvarðanlegt*. Kerfi sem er *ákvarðanlegt* en *ekki fullkomið* er þannig að til er algrím til að skera úr um hvort setning er afleiðing af frumsetningunum en þar sem sumar sannar setningar eru ekki afleiðing af frumsetningunum dugar ákvörðunaraðferðin ekki til að skera úr um það í öllum tilvikum hvort setning sé sönn, aðeins hvort hún sé sannanleg.

Það verkefni að finna slíka ákvörðunaraðferð kallaði Hilbert *das Entscheidungs-problem*. Árið 1936 sannaði enski stærðfræðingurinn Alan Turing (1912-1954) að þetta vandamál sé óleysanlegt, þ.e. að ekki sé mögulegt að búa til ákvörðunaraðferð af því tagi sem Hilbert hafði talað um.

Uppgötvanir Turings og Gödels sem hér hefur verið sagt frá eru með merkustu vísindaafrekum 20. aldar. Með þeim varð að engu draumurinn um að setja alla stærðfræði fram sem *sjálfu sér samkvæmt*, *fullkomið* og *ákvarðanlegt* kerfi eins og Hilbert hafði hugsað sér. Afleiðslukerfi eins og það sem Evklíð setti fram fyrir rúmfræðina og Hilbert endurbætti getur ekki fangað allan sannleika um stærðfræðileg efni.

Hinar 20 rúmfræðilegu frumsetningar Hilberts duga að vísu til að leiða út allar setningar í *Frumþáttum* Evklíðs en því fer fjarri að þær dugi til að leiða út öll rúmfræðileg sannindi. Þegar í fornöld voru mönnum t.d. kunnar reglur um keilusnið sem ekki verða leiddar af þeim.

Að mestu byggt á:
A. Aaboe: *Episodes from the Early History of Mathematics,* Whasington DC 1964.
L. B. Blumenthal: *A Modern View of Geometry*. New York 1980.
E. Nagel og J. R. Newmann: *Gödel's Proof* , New York 1958.